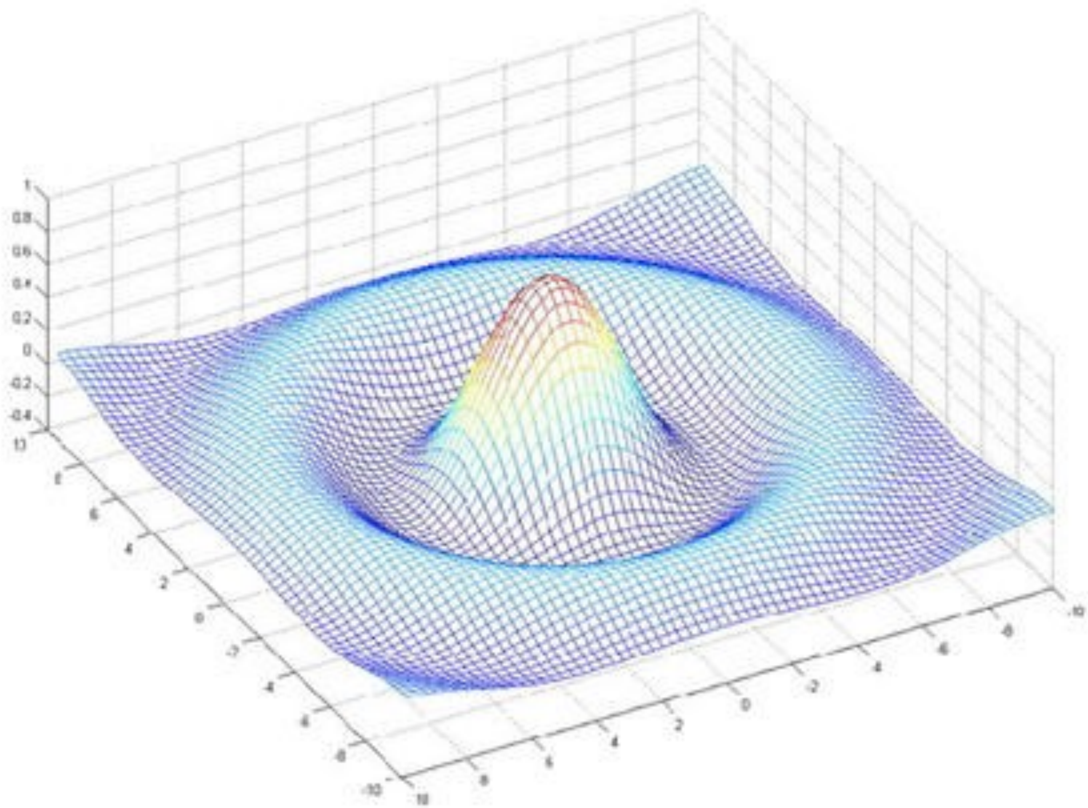
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

equazioni differenziali



definizione
equazione differenziale

Le equazioni differenziali

DEFINIZIONE

Equazione differenziale

Si chiama equazione differenziale un'equazione che ha per incognita una funzione $y = f(x)$ e che stabilisce una relazione fra la variabile indipendente x, la funzione y e almeno una delle sue derivate $(y', y'', \ldots)$, cioè è un'equazione del tipo $F(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}; \ldots) = 0$.

Ognuna delle funzioni che verifica un'equazione differenziale si chiama **soluzione** o **integrale** dell'equazione. Il grafico di una soluzione si chiama **curva integrale**.
Risolvere un'equazione differenziale significa determinare tutte le sue soluzioni.
Chiamiamo **integrale generale** l'insieme di tutte le funzioni che sono integrali dell'equazione.

ESEMPIO

L'equazione

$$y' - 4y = 0$$

è un'equazione differenziale che ha tra le soluzioni la funzione $y = e^{4x}$, che è un integrale particolare.
Ogni altra funzione del tipo ke^{4x} è soluzione. Infatti y e la sua derivata $y' = 4ke^{4x}$ verificano l'equazione.
Si può dimostrare che tutte le soluzioni sono del tipo $y = ke^{4x}$.
Dunque $y = ke^{4x}$ è l'integrale generale.

L'**ordine** di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che compaiono nell'equazione. Per esempio, $y''' - 2y' = 3xy$ è un'equazione differenziale del terzo ordine.
Noi studieremo alcuni tipi di equazioni differenziali del **primo ordine**, in cui compare solo la derivata prima della funzione, e del **secondo ordine**, in cui compaiono solo la derivata prima e la derivata seconda.

Equazioni differenziali del 1° ordine

Le equazioni differenziali del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine è riconducibile alla forma:

$$\boldsymbol{F(x; y; y') = 0}$$

L'equazione è in **forma normale** quando è scritta come

$$y' = G(x; y)$$

ossia è esplicitata rispetto alla derivata prima della funzione incognita y.

esempio

$$\boxed{2y + y' = 4x \xrightarrow{\text{FORMA NORMALE}} y' = 4x - 2y}$$

Data l'equazione differenziale:

$$\boxed{y' - 2x = 1 \xrightarrow{\textit{FORMA NORMALE}} y' = 2x + 1}$$

diremo che una funzione y=f(x) è soluzione dell'equazione se e solo se è una sua primitiva.

Pertanto, l'***integrale generale*** dell'equazione differenziale è dato dal seguente integrale indefinito:

$$\boxed{y = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c}$$

Una ***soluzione particolare***, per esempio, è la seguente (ottenuta ponendo c=2):

$$\boxed{y = x^2 + x + 2}$$

In generale, data un'equazione differenziale del primo ordine $F(x; y; y') = 0$, l'integrale generale è dato dalla famiglia di funzioni $y = f(x; c)$; le **soluzioni particolari** si ottengono attribuendo al parametro c determinati valori.

Spesso, in un'equazione differenziale del primo ordine, si cerca una soluzione particolare la cui curva integrale passa per un punto $(x_0; y_0)$ assegnato. In questo caso la risoluzione dell'equazione differenziale consiste nella determinazione di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi le due condizioni:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

Un problema di questo genere è detto **problema di Cauchy**.
La condizione $y_0 = f(x_0)$ è detta **condizione iniziale del problema di Cauchy**.

ESEMPIO

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2x = 1 \\ 5 = f(2) \end{cases}$$

Essendo $y = x^2 + x + c$ l'integrale generale, poniamo:

$$(2)^2 + 2 + c = 5 \quad \rightarrow \quad c = -1.$$

La soluzione del problema è $y = x^2 + x - 1$. La parabola che rappresenta questa equazione passa per il punto di coordinate $(2; 5)$.

Fra le equazioni differenziali del primo ordine studieremo:

- le equazioni del tipo $y' = f(x)$;
- le equazioni **a variabili separabili** del tipo $y' = g(x)h(y)$, con $h(y) \neq 0$;
- le equazioni lineari del tipo $y' + a(x)y = b(x)$.

Equazioni differenziali del tipo y'=f(x)

Procedimento risolutivo

- Si isola y'.
- Si integrano entrambi i membri rispetto alla variabile x: $\int y'\,dx = \int f(x)\,dx$.
- L'integrale indefinito $\int f(x)\,dx$ è la soluzione generale dell'equazione.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione differenziale $y' - 2\cos x = 0$.

- Isoliamo y':

$$y' = 2\cos x.$$

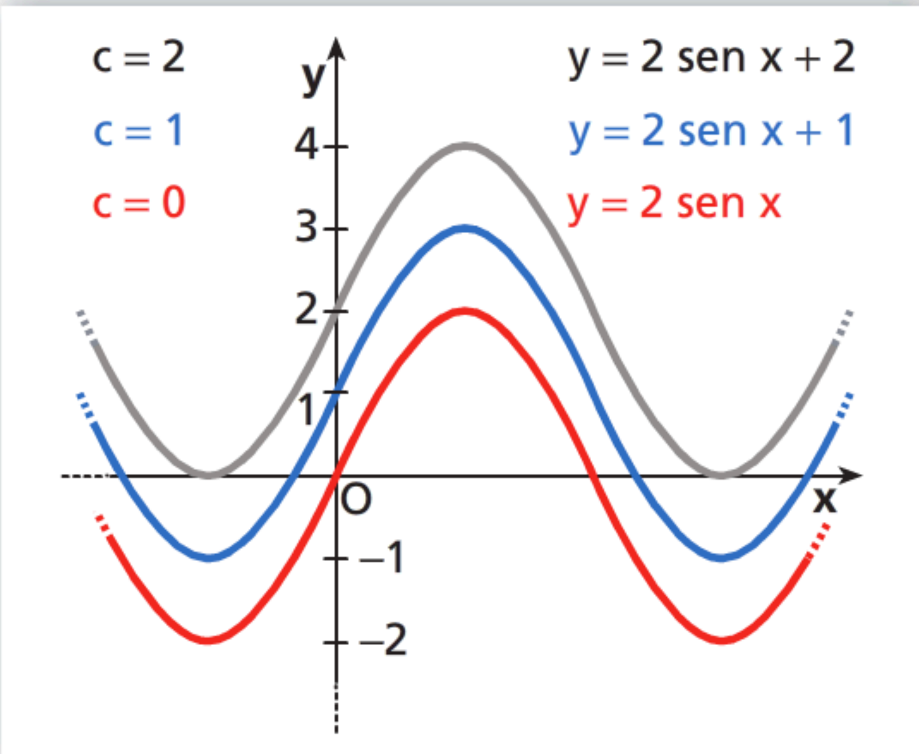
- Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\,dx = \int 2\cos x\,dx,$$ ossia

$$y = \int 2\cos x \, dx = 2 \cdot \int \cos x \, dx = 2\,\mathrm{sen}\, x + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni sono rappresentate dalle curve integrali di equazione:

$$y = 2\ \mathrm{sen}\ x + c.$$



◀ **Figura 1** Al variare di *c* otteniamo curve diverse. Ogni curva si può ottenere dall'altra mediante una traslazione.

Equazioni differenziali a variabili separabili

DEFINIZIONE

Equazione differenziale a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine è detta a variabili separabili quando può essere scritta nella forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.

$$y' = \underbrace{\boxed{g(x)}}_{\text{funzione di } x} \cdot \underbrace{\boxed{h(y)}}_{\text{funzione di } y}$$

- In queste equazioni la derivata di y è uguale al prodotto di una funzione nella sola variabile x per un'altra nella sola variabile y.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione differenziale $y' = 4xy^2$.

Poiché $y' = \dfrac{dy}{dx}$, riscriviamo l'equazione differenziale nel seguente modo:

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2.$$

- In questo caso

  $g(x) = 4x$ e $h(y) = y^2$

Separiamo le variabili in modo da avere al primo membro la y e al secondo membro la x. Per ottenere ciò, moltiplichiamo entrambi i membri per la quantità $\dfrac{1}{y^2} \cdot dx$, supponendo che sia $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{\cancel{dx}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cancel{dx} = 4x\cancel{y^2} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}} \cdot dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = 4x\,dx.$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 4x\,dx,$$

$$-\frac{1}{y} = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} = -(2x^2 + c).$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy = \frac{y^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{y} + k.$

$$y = -\frac{1}{2x^2 + c}$$

Riprendiamo il caso precedentemente escluso di $y = 0$.

Per $y = 0$ abbiamo che $y' = 0$ e l'equazione data è soddisfatta.

La soluzione dell'equazione data è quindi:

$$y = -\frac{1}{2x^2 + c} \vee y = 0.$$

Osservazione. Ponendo $c = \frac{1}{k}$, con $k \neq 0$, si ottiene:

$$y = -\frac{1}{2x^2 + \frac{1}{k}} = -\frac{k}{2kx^2 + 1}.$$

Se estendiamo la validità di tale scrittura anche al caso di $k = 0$, otteniamo proprio $y = 0$. Quindi

$$y = -\frac{k}{2kx^2 + 1}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

è un modo più sintetico di scrivere la soluzione.

In generale, per risolvere un'equazione differenziale riconducibile alla forma

$$y' = g(x) \cdot h(y):$$

- si scrive $y' = \frac{dy}{dx}$ e quindi $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$;
- si separano le variabili, e cioè si moltiplicano entrambi i membri per $\frac{1}{h(y)} \cdot dx$, supponendo $h(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx;$$

- si integrano entrambi i membri, $\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx$, e si ricava y in funzione di x dall'uguaglianza fra le primitive trovate;
- si esaminano a parte i casi derivanti da $h(y) = 0$.

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

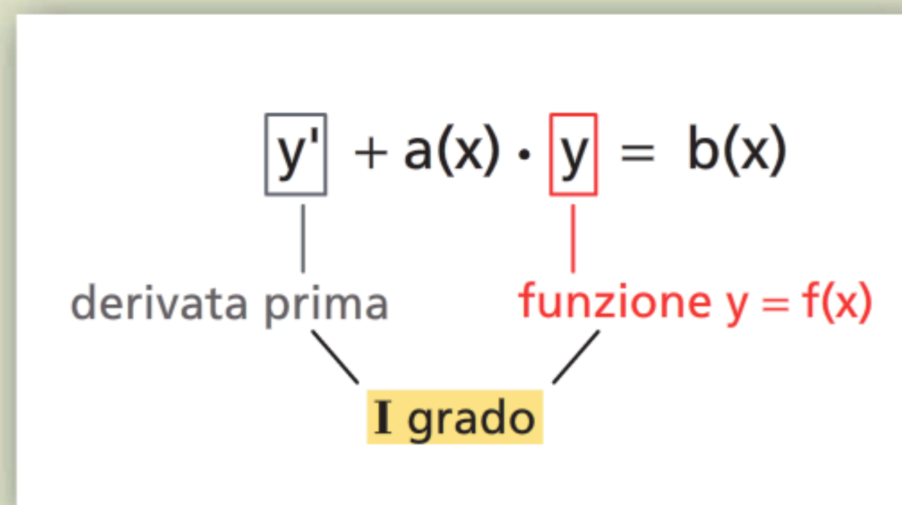
DEFINIZIONE

Equazione differenziale lineare del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice lineare quando può essere scritta nella forma

$$y' + a(x)y = b(x),$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ rappresentano funzioni note e continue in un opportuno intervallo.



Se $b(x) = 0$, l'equazione è detta **omogenea**; se $b(x) \neq 0$, è detta **completa**.

- L'equazione differenziale $y' - 3xy - x^4 = 0$ è lineare; l'equazione differenziale $y' = 4xy^2$ **non** è lineare, perché y compare al quadrato.

L'equazione lineare è omogenea

Se $b(x) = 0$, risulta

$$\boxed{y' + a(x)y = 0}$$

L'equazione è a variabili separabili. Risolviamola.

Se $y \neq 0$:

$$y' = -a(x)y \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = -a(x)y \quad \to \quad \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\,dx \quad \to \quad \ln|y| + c = -\int a(x)\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \ln|y| = -c - \int a(x)\,dx \quad \to \quad |y| = e^{-c-\int a(x)\,dx} \quad \to$$

$$\to \quad y = \pm e^{-c-\int a(x)dx} \quad \to \quad y = \pm e^{-c} e^{-\int a(x)dx}, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Poiché e^{-c} e $-e^{-c}$ sono costanti reali diverse da 0, possiamo indicarle genericamente con k e scrivere:

$$y = ke^{-\int a(x)\,dx}, \quad \text{con } k \neq 0.$$

Se $y = 0$, anche $y' = 0$ e l'equazione differenziale è verificata. Questa soluzione è compresa nella scrittura precedente se $k = 0$.
Quindi la soluzione dell'equazione è:

Soluzione equazione differenziale del 1° ordine lineare omogenea

$$\boxed{y = ke^{-\int a(x)\,dx}, \text{ con } k \in \mathbb{R}}$$

ESEMPIO

Risolviamo $y' = x^2 y$.

Tale equazione è lineare omogenea. Per determinare $a(x)$ scriviamo l'equazione nella forma $y' + a(x)y = 0$,

$$y' - x^2 y = 0,$$

da cui deduciamo $a(x) = -x^2$.

Utilizziamo la formula che fornisce direttamente la soluzione:

$$y = ke^{\int x^2 dx} = ke^{\frac{x^3}{3}}.$$

L'equazione lineare è completa

Per trovare la soluzione dell'equazione lineare completa, e cioè di $y' + a(x)y = b(x)$, consideriamo la soluzione dell'equazione lineare omogenea associata $y = ke^{-\int a(x)\,dx}$ e prendiamo k non più costante, ma funzione di x.
Ipotizziamo quindi che la soluzione dell'equazione completa possa essere scritta nella forma:

$$\boxed{y = k(x)e^{-\int a(x)\,dx}}$$

Questo procedimento è detto **metodo della variazione delle costanti** o **metodo di Lagrange**.

La derivata di $e^{-\int a(x)dx}$ è $e^{-\int a(x)dx} \cdot [-a(x)]$, per la regola di derivazione di una funzione composta.

Per trovare la funzione $k(x)$, imponiamo dunque che la precedente funzione y sia soluzione dell'equazione differenziale $y' + a(x)y = b(x)$.
Calcoliamo la derivata y':

$$y' = k'(x)e^{-\int a(x)dx} - k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale di partenza le espressioni di y e y',

$$k'(x)e^{-\int a(x)dx} - k(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)k(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \rightarrow \quad k'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale, nell'incognita k, del tipo $y' = f(x)$, che risolviamo integrando, ossia:

$$k(x) = \int b(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\, dx + c.$$

Sostituendo $k(x)$ nell'espressione iniziale di y, enunciamo il seguente teorema.

Soluzione equazione differenziale del 1° ordine lineare completa

TEOREMA

L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo $y' + a(x)y = b(x)$ è dato da:

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx + c\right].$$

ESEMPIO

Risolviamo $y' + \frac{y}{x} = x$, con $x > 0$.

L'equazione lineare è completa. Scriviamola nella forma $y' + a(x)y = b(x)$, per individuare $a(x)$ e $b(x)$.

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x \quad \rightarrow \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad b(x) = x.$$

Per facilitare l'applicazione della formula risolutiva, scomponiamola in varie parti, calcolando alcuni integrali che vi compaiono.

- $\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$
- $e^{-\int a(x)\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad e^{\int a(x)\,dx} = e^{\ln x} = x.$
- $\int e^{\int a(x)\,dx} \cdot b(x)\,dx = \int x \cdot x\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$

Sostituendo nella formula, otteniamo:

$$y = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + c\right] = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}.$$

Equazioni differenziali del 2° ordine

Definizione

Un'**equazione differenziale del 2° ordine** è riconducibile alla forma:

$$\boxed{F(x; y; y'; y'') = 0}$$

Si dice che è in **forma normale** quando è scritta come

$$\boxed{y'' = G(x; y; y')}$$

ossia è esplicitata rispetto alla derivata seconda della funzione incognita y.

ESEMPIO

L'equazione differenziale $y' - y'' = xy$ è del secondo ordine, perché contiene anche la derivata seconda della funzione incognita. Scritta in forma normale è $y'' = y' - xy$.

Le soluzioni delle equazioni differenziali del secondo ordine sono funzioni della variabile x, contenenti *due* costanti arbitrarie, che indicheremo con c_1 e c_2.

L'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine è dato quindi da una famiglia di funzioni nella variabile x, che dipendono anche dai valori delle costanti c_1 e c_2. Perciò l'integrale generale è del tipo $y = f(x; c_1; c_2)$. Le soluzioni particolari si ottengono attribuendo ai parametri c_1 e c_2 determinati valori.

Poiché l'integrale generale dipende da due parametri, occorre dare due condizioni se si vuol determinare una soluzione particolare.

Fra le equazioni differenziali del secondo ordine studieremo solo quelle **lineari con i coefficienti costanti**, ossia le equazioni del tipo

$$\boxed{y'' + by' + cy = r(x)}$$

dove b e c sono numeri reali e $r(x)$ è una funzione continua in un opportuno intervallo. Tali equazioni si dicono:

- **omogenee**, se $r(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo in cui è definita;
- **complete**, se $r(x) \neq 0$ in qualche punto dell'intervallo in cui è definita.

Equazioni differenziali del 2° ordine omogenea

Se r(x)=0, l'equazione differenziale:

$$y'' + by' + cy = r(x)$$

diventa:

Equazione differenziale del 2° ordine omogenea

$$\boxed{y'' + by' + cy = 0} \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che la funzione esponenziale $y = e^{zx}$, dove z è un'opportuna costante, può essere una sua soluzione. Per verificare ciò calcoliamo le derivate prima e seconda, $y' = ze^{zx}$ e $y'' = z^2e^{zx}$, sostituiamo nell'equazione di partenza e poi dividiamo entrambi i membri per $e^{zx} \neq 0$:

$$z^2 \cdot e^{zx} + bz \cdot e^{zx} + c \cdot e^{zx} = 0 \quad \rightarrow \quad (z^2 + bz + c) \cdot e^{zx} = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 + bz + c = 0$$

La funzione $y = e^{zx}$ è soluzione dell'equazione differenziale data se z è soluzione dell'equazione

$$z^2 + bz + c = 0$$

L'equazione algebrica di secondo grado

$$z^2 + bz + c = 0$$

ha gli stessi coefficienti dell'equazione iniziale differenziale

$$y'' + by' + cy = 0.$$

che si chiama **equazione caratteristica dell'equazione differenziale**. Risolvendo l'equazione caratteristica, quindi, si trovano soluzioni particolari dell'equazione differenziale con le quali è possibile costruire quella generale, che, si può dimostrare, si ottiene con una combinazione lineare delle due soluzioni particolari.

ESEMPIO

Risolviamo $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Scriviamo la sua equazione caratteristica: $z^2 - 5z + 6 = 0$.
Risolviamo tale equazione: $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 2, z_2 = 3$.
Le funzioni $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{3x}$ sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale data.

Il tipo delle soluzioni particolari che si ottengono è determinato dalle radici dell'equazione caratteristica, che, a loro volta, dipendono dal valore del discriminante.

In generale, per risolvere un'equazione lineare omogenea del secondo ordine scritta nella forma

$$y'' + by' + cy = 0, \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R},$$

si applica il seguente procedimento, che illustriamo senza dimostrazione.

- Si scrive l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale data e si calcola il suo discriminante:

$$z^2 + bz + c = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4c.$$

- Si distinguono tre casi:

1. $\Delta > 0$

– si determinano le due soluzioni reali e distinte z_1 e z_2;
– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $\Delta = 0$

– si determinano le due soluzioni reali coincidenti $z_1 = z_2$;
– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 x e^{z_1 x}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ossia, raccogliendo $e^{z_1 x}$:

$$\boldsymbol{y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2\, x)}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $\Delta < 0$

– si determinano le due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$;

– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ossia, raccogliendo $e^{\alpha x}$:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO

1. Risolviamo $y'' - 2y' + y = 0$.

L'equazione caratteristica associata è $z^2 - 2z + 1 = 0$.

Si ha: $\Delta = 0$; $z_1 = z_2 = 1$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = e^x(c_1 + c_2 x), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Risolviamo $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Scriviamo l'equazione caratteristica associata: $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Calcoliamo: $\dfrac{\Delta}{4} = -9$; $z_{1,2} = 2 \pm 3i$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Equazioni differenziali del 2° ordine completa

Per risolvere un'equazione lineare del secondo ordine completa e a coefficienti costanti, del tipo

Equazione differenziale del 2° ordine completa

$$\boxed{y'' + by' + cy = r(x)} \qquad \text{con } b, c \in \mathbb{R},$$

si utilizza il seguente teorema, di cui non forniamo la dimostrazione.

TEOREMA

La soluzione generale y dell'equazione $y'' + by' + cy = r(x)$ si ottiene addizionando a una sua soluzione particolare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' + by' + cy = 0$.

Ci limitiamo a considerare il caso particolare in cui $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ e $r(x)$ è una qualsiasi funzione. L'equazione differenziale diventa della forma $y'' = r(x)$ e possiamo risolverla procedendo con due integrazioni successive.

ESEMPIO

Risolviamo $y'' = 12x^2 + 4$.

Determiniamo la derivata prima della funzione y integrando ciascun membro dell'equazione:

$$y' = \int (12x^2 + 4)\, dx = 4x^3 + 4x + c_1.$$

Determiniamo la funzione con un'ulteriore integrazione:

$$y = \int (4x^3 + 4x + c_1)\, dx = x^4 + 2x^2 + c_1 x + c_2.$$

Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $2y' - \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Isoliamo y':

$$2y' = \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow y' = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}.$$

Integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{2}\,dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \int (\operatorname{sen} x + 1)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x + x) + c = \frac{x - \cos x}{2} + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è $y = \dfrac{x - \cos x}{2} + c$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la soluzione particolare dell'equazione differenziale $y' = \frac{x+1}{x}$, che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 2$.

- Risolviamo l'equazione differenziale data integrando entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\,dx = \int \frac{x+1}{x}\,dx$$

$$y = \int\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = x + \ln|x| + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale è $y = x + \ln|x| + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

- Imponiamo nell'integrale generale $y = x + \ln|x| + c$ la condizione $y(1) = 2$, sostituendo alla y il valore 2 e alla x il valore 1.

$$2 = 1 + \ln 1 + c \quad \rightarrow \quad 2 = 1 + c \quad \rightarrow \quad c = 1.$$

La soluzione particolare cercata è: $y = x + \ln|x| + 1$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y' = (4x + 1)y$.

L'equazione è a variabili separabili; infatti essendo $y' = \frac{dy}{dx}$, otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = (4x + 1)y \quad \rightarrow \quad dy = (4x + 1)y\,dx.$$

- **Se $y \neq 0$**, dividiamo per y:

  $$\frac{dy}{y} = (4x + 1)\,dx.$$

  Integriamo entrambi i membri:

  $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int (4x + 1)\,dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}} + x + c.$$

  Ricaviamo y in funzione di x:

  $$|y| = e^{2x^2 + x + c} \quad \rightarrow \quad y = \pm e^{2x^2 + x + c}.$$

- **Se $y = 0$**, anche $y' = 0$. Nell'equazione iniziale verifichiamo che $y = 0$ è una soluzione.
- **In sintesi**, le soluzioni dell'equazione data sono:

  $$y = \pm e^{2x^2 + x + c} \vee y = 0.$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la soluzione dell'equazione differenziale $y' - \dfrac{2x-1}{y} = 0$ relativa alla condizione $y(1) = 1$.

Troviamo le soluzioni dell'equazione differenziale. Isoliamo y':

$$y' = \frac{2x-1}{y}.$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{y} \;\rightarrow\; y\,dy = (2x-1)\,dx \;\rightarrow\; \int y\,dy = \int (2x-1)\,dx \;\rightarrow\; \frac{y^2}{2} = x^2 - x + c' \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; y^2 = 2x^2 - 2x + c \;\rightarrow\; y = \pm\sqrt{2x^2 - 2x + c}\,.$$

Poiché la soluzione deve soddisfare la condizione $y(1) = 1$, la y deve essere positiva, quindi consideriamo soltanto:

$$y = \sqrt{2x^2 - 2x + c}\,.$$

Determiniamo c, ponendo nell'equazione trovata $x = 1$ e $y = 1$:

$$1 = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c} \;\rightarrow\; \sqrt{c} = 1 \;\rightarrow\; c = 1.$$

La soluzione particolare cercata è: $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}\,.$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y' + 2xy - 2x = 0$.

Osserviamo che l'equazione è lineare, perché possiamo scriverla nella forma $y' + a(x) \cdot y = b(x)$:

$$y' + 2xy = 2x.$$

Deduciamo che $a(x) = 2x$ e $b(x) = 2x$.

Utilizziamo la formula risolutiva $y = e^{-\int a(x)\,dx} \cdot \left[\int e^{\int a(x)\,dx} \cdot b(x)\,dx + c\right]$ in cui:

$$\int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2; \quad e^{-\int a(x)\,dx} = e^{-x^2}; \quad e^{\int a(x)\,dx} = e^{x^2}; \quad \int e^{\int a(x)\,dx} \cdot b(x)\,dx = \int (e^{x^2} \cdot 2x)\,dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per sostituzione ponendo $t = x^2$, da cui $dt = 2x\;dx$:

$$\int (e^{x^2} \cdot 2x)\,dx = \int e^t\,dt = e^t = e^{x^2} \quad \rightarrow \quad \int e^{\int a(x)\,dx} \cdot b(x)\,dx = e^{x^2}.$$

Sostituiamo nella formula e otteniamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = e^{-x^2} \cdot (e^{x^2} + c) = 1 + \frac{c}{e^{x^2}} \quad \rightarrow \quad y = 1 + \frac{c}{e^{x^2}}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 - 2z - 3 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 > 0. \qquad \text{Soluzioni reali distinte: } z_1 = -1,\ z_2 = 3.$$

Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta > 0$, sono date da $y = c_1 \cdot e^{z_1 x} + c_2 \cdot e^{z_2 x}$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' + 4y' + 4y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 + 4z + 4 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 0. \qquad \text{Soluzioni reali coincidenti: } z_1 = z_2 = -2.$$

Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta = 0$, sono date da $y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2 x)$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è:

$$z^2 - 2z + 5 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = -4. \qquad \text{Soluzioni complesse coniugate: } z_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti, nel caso di $\Delta < 0$, sono date da $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \operatorname{sen} \beta x)$, dove α e β sono la parte reale e la parte immaginaria di una soluzione dell'equazione caratteristica; poiché $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$y = e^x(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \operatorname{sen} 2x).$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' = 6x + \operatorname{sen} x$.

Poiché nell'equazione differenziale non compaiono né y' né y, procediamo con una doppia integrazione.

Determiniamo la derivata prima della funzione y integrando:

$$y' = \int (6x + \operatorname{sen} x)\, dx = 3x^2 - \cos x + c_1.$$

Determiniamo la funzione y con un'ulteriore integrazione:

$$y = \int (3x^2 - \cos x + c_1)\, dx = x^3 - \operatorname{sen} x + c_1 x + c_2.$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 15y = 0$, che soddisfa le condizioni: $y(0) = 5$, $y'(0) = 9$.

Troviamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. La sua equazione caratteristica è:

$$z^2 - 2z - 15 = 0. \qquad \frac{\Delta}{4} = 16 > 0. \qquad \text{Soluzioni reali e distinte: } z_1 = -3,\ z_2 = 5.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $y = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x}$.
Determiniamo i valori delle costanti c_1 e c_2. Calcoliamo y':

$$y' = c_1 e^{-3x}(-3) + c_2 e^{5x}(5) = -3c_1 e^{-3x} + 5c_2 e^{5x}.$$

Affinché siano soddisfatte le condizioni date, occorre che le uguaglianze trovate siano soddisfatte per $x = 0$, $y = 5$ e $y' = 9$.

Impostiamo un sistema con le due uguaglianze trovate:

$$\begin{cases} y = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{5x} \\ y' = -3c_1 \cdot e^{-3x} + 5c_2 \cdot e^{5x} \end{cases}$$

Sostituiamo nel sistema i valori $x = 0$, $y = 5$ e $y' = 9$:

$$\begin{cases} 5 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 \\ 9 = -3c_1 e^0 + 5c_2 e^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 9 = -3c_1 + 5c_2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema nelle due incognite c_1 e c_2 per sostituzione:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ -3c_1 + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ -3(5 - c_2) + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ -15 + 3c_2 + 5c_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 - c_2 \\ 8c_2 = 9 + 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

La soluzione particolare cercata è la seguente: $y = 2e^{-3x} + 3e^{5x}$.

ESERCIZIO GUIDA

Un punto si muove su una retta orientata con velocità $v(t) = 3x(t) + 2$, dove x è l'ascissa del punto ed è funzione del tempo t. Sapendo che la posizione iniziale del punto occupata al tempo $t = 0$ è $x_0 = 1$, calcoliamo come varia l'ascissa $x(t)$ del punto al variare del tempo t.

Poiché la velocità è definita $v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$, allora l'uguaglianza iniziale diventa:

$$x'(t) = 3x(t) + 2.$$

Conosciamo la posizione iniziale, quindi dobbiamo determinare una soluzione particolare dell'equazione. Risolviamo l'equazione che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, che scriviamo nella forma:

$$x' - 3x = 2 \quad \rightarrow \quad a(t) = -3 \text{ e } b(t) = 2.$$

Applichiamo la formula risolutiva, scomponendola in varie parti e calcolando alcuni integrali che vi compaiono, ossia calcoliamo:

$$\int a(t)\,dt = \int(-3)\,dt = -3t; \qquad e^{-\int a(t)dt} = e^{3t}; \qquad e^{\int a(t)dt} = e^{-3t};$$

$$\int e^{\int a(t)dt} \cdot b(t)\,dt = \int(e^{-3t} \cdot 2)\,dt = -\frac{2}{3}\int(-3e^{-3t})\,dt = -\frac{2}{3}e^{-3t}.$$

Completiamo la formula:

$$x = e^{3t}\left(-\frac{2}{3}e^{-3t} + c\right) = -\frac{2}{3} + ce^{3t}.$$

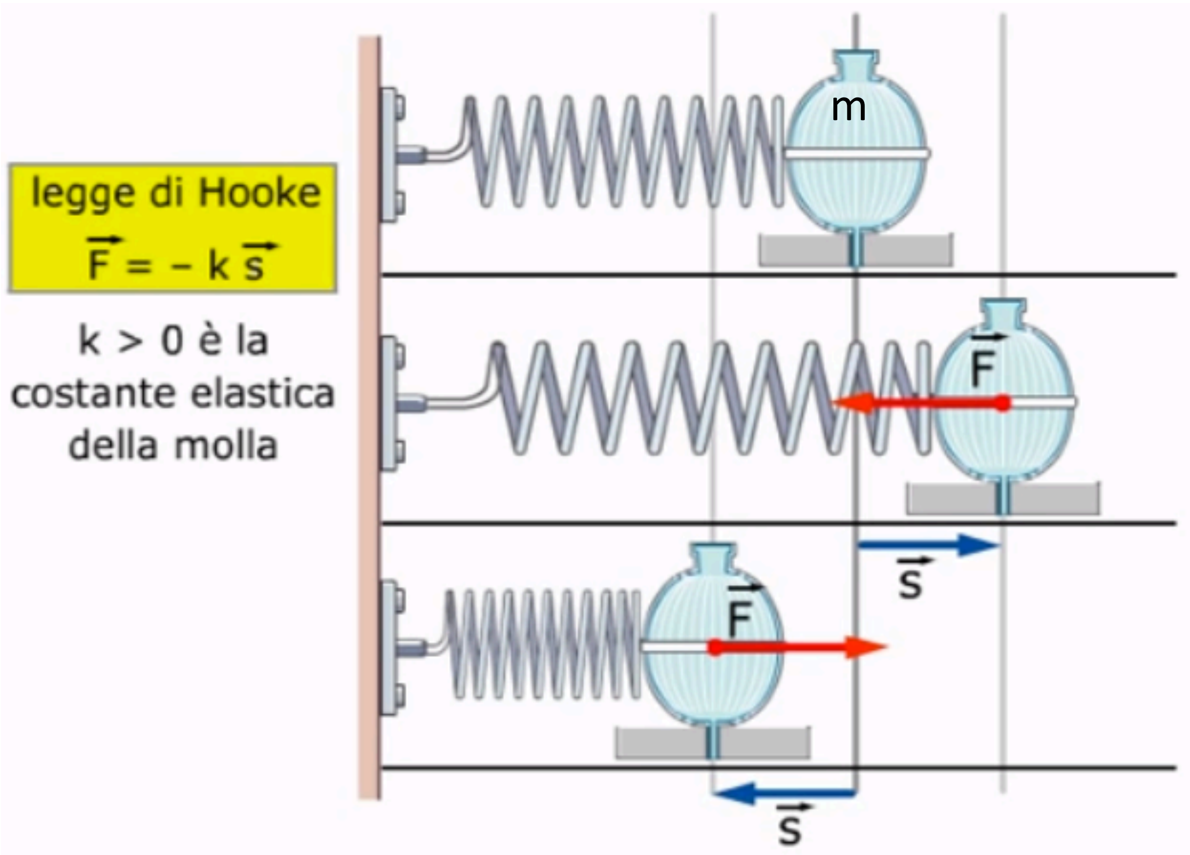
Determiniamo la costante c imponendo la condizione iniziale, ponendo cioè nell'equazione che abbiamo ottenuto $t = 0$ e $x = 1$:

$$1 = -\frac{2}{3} + ce^{0} \rightarrow c - \frac{2}{3} = 1 \rightarrow c = 1 + \frac{2}{3} \rightarrow c = \frac{5}{3}.$$

La legge cercata è perciò: $x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}e^{3t} = \frac{5e^{3t} - 2}{3}.$

Applicazioni alla fisica

Problema: Una massa m, collegata a una molla di costante elastica k, viene spostata dalla sua posizione di equilibrio e poi rilasciata. Determinare la legge oraria del moto x=x(t) della massa m, nel caso in cui il piano orizzontale su cui si muove sia privo di attrito.



2° legge della dinamica

legge di Hooke

$$\boxed{F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}}$$

$$\boxed{F = -kx}$$

Equazione differenziale del 2° ordine omogenea

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

L'equazione algebrica caratteristica associata è:

$$\boxed{z^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

3. $\Delta < 0$

– si determinano le due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$;

– la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ossia, raccogliendo $e^{\alpha x}$:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)}, \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{dove: \ \alpha = 0 \qquad \beta = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Quindi, la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 sen\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

Posto:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

otteniamo la ben nota **equazione del moto armonico semplice**:

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 sen\omega t}$$

Problema. *Un corpo sferico di massa 200 g cade in un mezzo viscoso. Sapendo che quest'ultimo si manifesta mediante una forza frenante direttamente proporzionale alla velocità del corpo in caduta, secondo un coefficiente λ=0,2 N·s/m, determinare:*

a) l'espressione della velocità in funzione del tempo;

b) la velocità del corpo dopo 4 s;

c) la velocità limite.

soluzione

Immaginiamo che il corpo sferico cada nel messo viscoso e indichiamo con l'espressione:

$$\vec{F}_R = -\lambda\vec{v}$$

la forza frenante che agisce su di esso, il cui modulo è direttamente proporzionale a quello della velocità di caduta e in cui λ>0 è una costante che dipende dal mezzo viscoso. Il segno meno che compare nella relazione, indica che tale forza frenante si oppone al verso della velocità.

Il corpo è quindi sottoposto a questa forza e alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ rivolta verso il centro della Terra.

Il corpo è quindi sottoposto a questa forza e alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ rivolta verso il centro della Terra.

Applicando la seconda legge di Newton si ottiene:

$$P - F_R = ma$$

Sostituendo le espressioni delle due forze a primo membro, otteniamo:

$$mg - \lambda v = ma$$

Ricordando che l'accelerazione è la rapidità di variazione della velocità nel tempo, cioè che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

dalla precedente relazione si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v$$

ossia:

$$\frac{m}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{\lambda} - v$$

e quindi:

$$\frac{dv}{\frac{mg}{\lambda} - v} = \frac{\lambda}{m} dt$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$-\ln\left(\frac{mg}{\lambda} - v\right) = \frac{\lambda}{m} \cdot t + c$$

da cui:

$$\frac{mg}{\lambda} - v = e^{-\frac{\lambda}{m}t + c}$$

Ponendo $e^c = k$, possiamo determinare la velocità dalla precedente relazione:

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda} - ke^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Supponendo che all'istante iniziale il corpo sferico sia fermo, cioè che $v(0) = 0$, dalla relazione precedente possiamo determinare il valore della costante come segue:

$$\frac{mg}{\lambda} - k = 0$$

cioè:

$$k = \frac{mg}{\lambda}$$

In definitiva, l'espressione della velocità di caduta in funzione del tempo sarà la seguente:

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

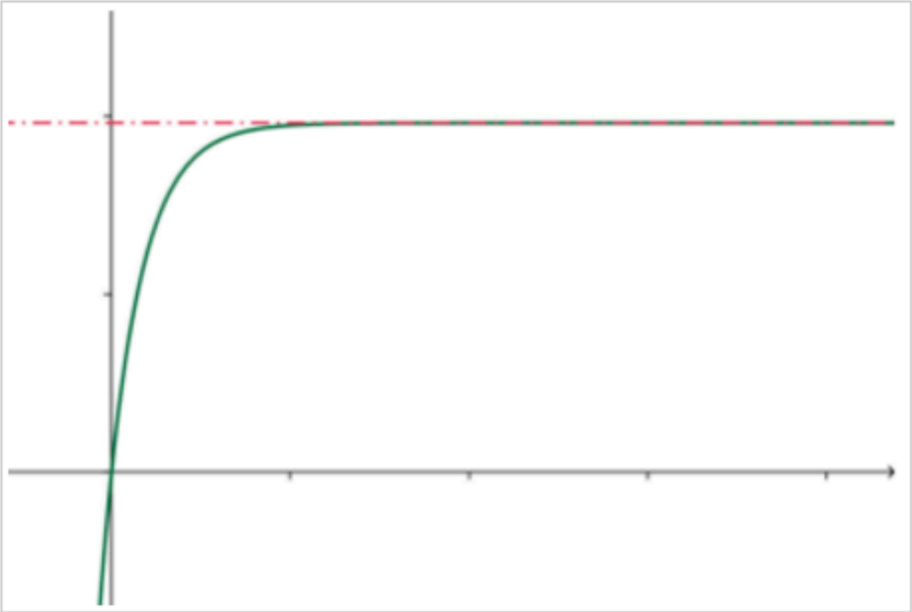
Inserendo i valori dati nel problema otteniamo la funzione:

$$v(t) = 9,81 \cdot (1 - e^{-t})$$

Per determinare la velocità del corpo dopo 2 s, è sufficiente determinare l'immagine di 2 tramite la funzione precedente, ossia:

$$v(2s) = 9,81 \cdot (1 - e^{-2}) = 6,2m/s$$

La rappresentazione grafica della funzione è la seguente:



Dal grafico notiamo che la velocità ha un asintoto orizzontale che si può determinare mediante il seguente limite:

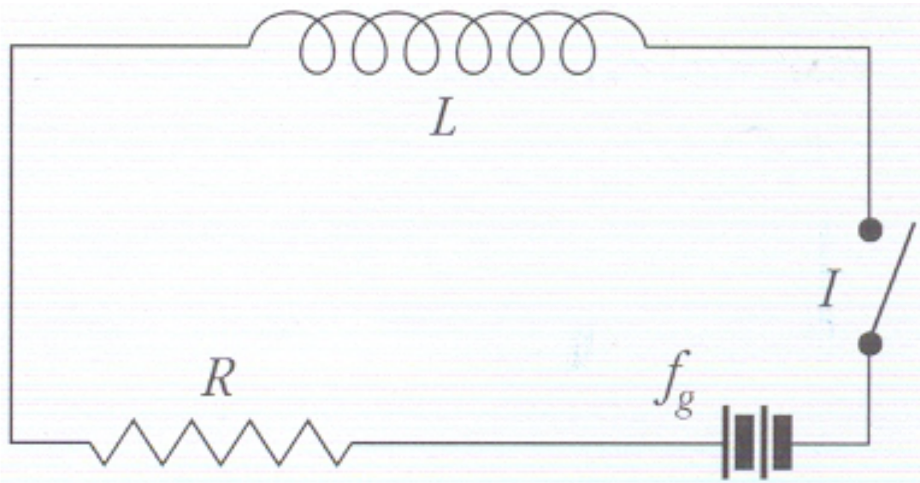
$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{mg}{\lambda}\cdot\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)\right]=\left(\frac{mg}{\lambda}\right)^{-}$$

Nel nostro caso, questi limite ci permette di determinare l'asintoto di equazione:

$$y=9,81$$

Quindi il valore $v=9,81m/s$ rappresenta la velocità limite.

EXTRACORRENTE DI CHIUSURA DI UN CIRCUITO



Chiudendo l'interruttore, la corrente non si porta istantaneamente sul valore di regime $I_R=f_g/R$ (legge di Ohm).

Nel brevissimo intervallo di tempo della chiusura del circuito, la variazione di corrente produce una f_{em} autoindotta che, per la legge di Lenz, ostacola il raggiungimento del valore di regime $I_R=f_g/R$.

Pertanto, alla fem costante f_g fornita dal generatore si somma algebricamente quella autoindotta f_{em}. Per la legge di Ohm si ha che:

$$f_g - L\frac{di}{dt} = Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{f_g}{L}$$

E' un'equazione differenziale completa del 1° del tipo:

$$\boxed{y'} + a(x)\cdot\boxed{y} = b(x)$$

derivata prima — funzione $y = f(x)$

I grado

$$a(x) = \frac{R}{L} \qquad b(x) = \frac{f_g}{L}$$

La soluzione generale di tale equazione è:

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx + c\right]$$

Applicata al nostro problema, otteniamo:

$$\boxed{i(t) = e^{-\frac{R}{L}\int dt}\left[\frac{f_g}{L}\int e^{\frac{R}{L}\int dt}dt + c\right]}$$

Dopo aver calcolato gli integrali contenuti nella soluzione, e posto:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Costante di tempo del circuito

si ottiene:

$$\boxed{i(t) = e^{-t/\tau}\left[\frac{f_g}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{t/\tau}dt + c\right] = \frac{f_g}{R} + ce^{-t/\tau}}$$

Ma a noi interessa la soluzione particolare, ossia dobbiamo applicare alla soluzione generale la condizione iniziale (problema di Cauchy):

$$\boxed{\begin{cases} F(x;y;y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}}$$

che, nel nostro problema è:

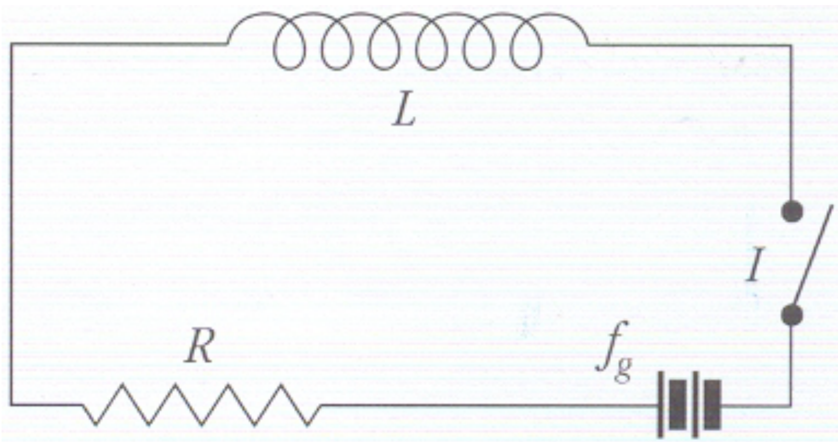
$$\boxed{i(0) = 0 \Rightarrow \frac{f_g}{R} + ce^{-0/\tau} = 0 \Rightarrow \frac{f_g}{R} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{f_g}{R}}$$

In definitiva, la soluzione é

$$\boxed{i(t) = \frac{f_g}{R} - \frac{f_g}{R} e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{f_g}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

EXTRACORRENTE DI CHIUSURA DI UN CIRCUITO



In modo analogo, all'apertura del circuito si origina una fem autoindotta che ostacola la diminuzione di corrente dal valore di regime a zero.

Per la legge di Ohm (circuito aperto, f_g=0) si ha che:

$$\boxed{-L\frac{di}{dt} = Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0}$$

E' un'equazione differenziale omogenea del 1° del tipo:

$$\boxed{y' + a(x)y = 0}$$

$$\boxed{a(x) = \frac{R}{L}}$$

La soluzione generale di tale equazione è:

$$\boxed{y = ke^{-\int a(x)\,dx}, \text{ con } k \in \mathbb{R}}$$

Applicata al nostro problema, otteniamo:

$$\boxed{i(t) = ke^{-\frac{R}{L}\int dt} = ke^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Conoscendo la condizione iniziale (problema di Cauchy):

$$\boxed{i(0) = \frac{f_g}{R} \Rightarrow ke^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{f_g}{R} \Rightarrow k = \frac{f_g}{R}}$$

in definitiva, la soluzione è:

$$\boxed{i(t) = \frac{f_g}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$